МБОУ «Каргасокская СОШ-интернат №1»

Методическое объединение естественно-математического цикла

Доклад на тему:

«Методы решения целых рациональных уравнений»

Докладчик Попов Д.А. учитель математики

с. Каргасок, 2017г.

1. Метод разложения на множители

Пример:

$8x^4+6x^3-13x^2-x+3=0$

Рассмотрим делители свободного члена и коэффициента при x^4

Делители 3: $\pm1,\pm3$;

Делители 8: $\pm1,\pm2,\pm4,\pm8$;

Возможные рациональные корни находятся среди чисел:

$\pm1,\pm3,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{4},\pm\frac{1}{8},\pm\frac{3}{2},\pm\frac{3}{4},\pm\frac{3}{8}$.

Подставим эти числа в уравнение и находим первый корень уравнения $x_1=-\frac{1}{2}$.

Поделим многочлен $8x^4+6x^3-13x^2-x+3=0$ на $x+\frac{1}{2}$.

Примечание (1): При делении многочлена $a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$ на $x-c$ получается многочлен $b_0x^{n-1}+b_1x^{n-2}+...+b_{n-2}x+b_{n-1}$ с остатком b_n.

При этом коэффициенты результирующего многочлена удовлетворяют рекуррентным соотношениям: $b_0=a_0$, $b_k=a_k+cb_{k-1}$.

На основании (1) получим новый многочлен $8x^3+2x^2-14x+6$, используя схему Горнера, находим следующий корень уравнения $x_2=\frac{3}{4}$, разделив этот многочлен на $x-\frac{3}{4}$, получим многочлен второй степени $8x^2+8x-8$. Решив данное квадратное уравнение, получаем корни $x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{3}{4}$, $x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

2. Метод замены неизвестного

$(x^2+2x)^2-(x+1)^2=55$

Обозначим $t=(x+1)^2$, тогда получим новое уравнение

$(t-1)^2-t=55$, упростим

$t^2-3t-54=0$, корни уравнения $t_1=-6, t_2=9$

Таким образом, $(x+1)^2=-6$ и $(x+1)^2=9$

Уравнение $(x+1)^2=-6$ не имеет корней.

Решим уравнение $(x+1)^2=9$

$x+1=-3$ или $x+1=3$

Получим два корня $x_1=2$, $x_2=-4$. Ответ: $x_1=2$, $x_2=-4$.

3. Уравнения специального вида

Алгебраическое уравнение $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad (e \neq 0)$ называется обратным уравнением 4й степени, если коэффициенты уравнения связаны соотношением $\frac{a}{e} = \left(\frac{b}{d}\right)^2$.

Пример: $18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0$, это уравнение является уравнением специального вида, поскольку коэффициенты связаны отношением $\frac{18}{8} = \left(-\frac{3}{2}\right)^2$.

Поскольку $(x \neq 0)$, можем поделить уравнение на x^2.

Получим уравнение

$$18x^2 - 3x - 25 + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} = 0$$

$$18(x^2 + \frac{4}{9x^2}) - 3(x - \frac{2}{3x}) - 25 = 0$$

Пусть $t = x - \frac{2}{3x}$, значит $t^2 = x^2 + \frac{4}{9x^2} - \frac{4}{3}$, $t^2 + \frac{4}{3} = x^2 + \frac{4}{9x^2}$

Получим $18t^2 - 3t - 1 = 0$, решив данное квадратное уравнение, получим два корня $t_1 = \frac{1}{3}, t_2 = -\frac{1}{6}$.

Получаем: $x - \frac{2}{3x} = \frac{1}{3}$ и $x - \frac{2}{3x} = -\frac{1}{6}$

Приведя эти уравнения к нормальному виду, получаем два квадратных уравнения. Решив эти уравнения, получаем 4 корня: $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{2}{3}$, $x_{3,4} = -\frac{1 \pm \sqrt{97}}{12}$.

4. Симметрические уравнения

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad (a \neq 0)$$

Решаем заменой $t = x + \frac{1}{x}$.

Пример: $x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 5x + 1 = 0$

Т.к. $x \neq 0$, разделим многочлен на x^2, получим

$$x^2 + 5x + 2 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

Произведем замену:

$$t = x + \frac{1}{x}$$

$t^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$

Получаем новое уравнение $t^2 + 5t = 0$

$t_1 = 0, \quad t_2 = -5;$

Произведем обратную замену

$$\left[\begin{array}{ll} x + \frac{1}{x} = 0 & x^2 = -1, \text{ корней нет} \\ & \\ x + \frac{1}{x} = -5 & x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

5. Кососимметрические уравнения

$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0, \qquad (a \neq 0)$

Решается аналогично симметрическим уравнениям.

Если степень многочлена четная, тогда делим на $x^{\frac{n}{2}}$, где n – степень уравнения.

Если степень многочлена нечетная, тогда это уравнение всегда имеет корень $x = -1$. Понижаем степень многочлена делением на бином $x + 1$ в итоге получим четную степень многочлена, который делим на $x^{\frac{n}{2}}$,где n – степень уравнения.

6. Однородные уравнения

$a_1u^n + a_2u^{n-1}v + a_3u^{n-2}v^2 + \ldots + a_nv^n = 0$

Деление уравнения на v^n или u^n приводит его к уравнению n-й степени относительно неизвестного $t = \frac{u}{v}$ или $t = \frac{v}{u}$ соответственно.

Пример:

$(x^2 - 1)^2 + 5(x^4 - 1) - 6(x^2 + 1)^2 = 0$

Преобразуем $(x^2 - 1)^2 + 5(x^2 - 1)(x^2 - 1) - 6(x^2 + 1)^2 = 0$

Обозначим $(x^2 - 1) = u$, $(x^2 + 1) = v$.

Получим уравнение $u^2 + 5uv - 6v^2 = 0$, разделим это уравнение на $v^2 (v \neq 0)$

$\left(\frac{u}{v}\right)^2 + 5\frac{u}{v} - 6 = 0$, производим еще одну замену $t = \frac{u}{v}$, получаем новое уравнение

$t^2+5t-6=0$, решив данное квадратное уравнение получим корни $t_1=1$,$t_2=-6$.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{u}{v}=1 \\ \frac{u}{v}=-6 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=-6v \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x^2-1=x^2+1 \text{, корней нет} \\ x^2-1=-6\left(x^2+1\right)\text{, корней нет.} \end{array}\right.$$